مقایسه‌ی روش هم‌هندسه با اجزای محدود در تحلیل دینامیکی مسائل کشسان دوبعدی★

بهروز حسنی[۱] احسان ژیانی عیدگاهی[۲] علیرضا حسن‌زاده طاهری[۳] ناصر ظریف مقدم[۴]

چکیده *موضوع این مقاله تحلیل دینامیکی مسائل دوبعدی کشسان به روش هم هندسه و مقایسه‌ی آن با روش اجزای محدود است. برای این منظور رابطه‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم با استفاده از توابع پایه اسپلاین‌ها به‌دست آمده است. با طرح چند مثال که در آن از ماتریس‌های جرم سازگار و متمرکز استفاده شده است، به مقایسه‌ی جواب‌های روش‌های اجزای محدود و هم‌هندسه پرداخته شده است. همچنین تأثیر افزایش تعداد نقاط وارسی و افزایش درجه منحنی اسپلاین‌ها بر دقت جواب مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، چون در تحلیل دینامیکی گذرا از روش نیومارک استفاده شده، به تأثیر عامل‌های* α *و* γ *بر حل مساله پرداخته شده است. نتایج حاصل، دقت بالای روش هم‌هندسه را در مقایسه با روش اجزای محدود، علی‌رغم به‌کارگیری تعداد بسیار کم‌تری از درجات آزادی و در نتیجه کاهش ابعاد دستگاه معادلات و زمان حل مسأله، نشان می‌دهند.*

واژه‌های کلیدی روش هم‌هندسه، تحلیل دینامیکی گذرا، اسپلاین‌ها، ماتریس جرم سازگار و متمرکز.

Comparison of Isogeometric Analysis and Finite Elements in Dynamic Analysis of 2D Elasticity Problems

B.Hassani E.Zhiani A.Hassanzadeh N.zarif moghadam

Abstract *Dynamic analysis of two-dimensional elasticity problems using the Isogeometric analysis method and its comparison with the finite element method is the subject of this research. For this purpose, formulation of the governing differential equation is obtained by using the B-spline basis functions. Some numerical examples employing consistent and lumped mass matrices are presented in order to compare the results of Isogeometric analysis and finite elements. The effect of increasing the number of control points and the degree of B-spline basis functions on the accuracy of the solution are also investigated. Furthermore, since the Newmark method is employed for transient dynamic analysis, the effects of parameters* α *and* β *on the solution accuracy are investigated. The obtained results demonstrate higher accuracy of the isogeometric analysis method in comparison with the FEM, despite employing fewer numbers of degrees of freedom and consequently reduction in the dimensions of system of equations and computational effort.*

Keywords Isogeometric, transient dynamic analysis, Splines, consistent and lumped mass matrices

---

★ تاریخ تصویب مقاله ۸۹/۰۵/۱۷ و تاریخ دریافت نسخه نهایی اصلاح شده ۹۱/۶/۱۳

(۱) نویسنده مسئول: دانشیار، گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد.

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۳) دانشجوی کارشناسی ارشد، مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد

(٤) دکترای سازه، دانشکده فنی شهید منتظری مشهد.

مقدمه

امروزه تحلیل مسائلی که فرا روی مهندسان و محققان قرار می‌گیرد، آنان را ملزم به حل معادلاتی می‌کند که اغلب به شکل دیفرانسیلی هستند. در بیشتر مواقع حل این معادلات به روش‌های تحلیلی مقدور نیست و به‌ناچار باید از روش‌های عددی از قبیل روش تفاضل‌های محدود (Finite Difference Method)، روش اجزای محدود (Finite Element Method)، روش‌های بدون جزء (Meshless Method)؛ مانند روش نقاط محدود (Finite Point Method) و روش‌های جدیدتر؛ مانند روش تحلیل هم‌هندسه (Isogeometric Analysis Method) استفاده کرد. این روش‌ها هر یک در پی دیگری آمده و دو هدف اصلی را دنبال کرده‌اند. این اهداف عبارتند از اولاً ایجاد کارایی، دقت و سرعت بالاتر و ثانیاً ایجاد امکاناتی جدیدتر برای حل مسائل و رفع مشکلات روش‌های پیشین.

استفاده از روش اجزای محدود در تحلیل سازه‌های پیچیده و مکانیک محاسباتی به امری معمول تبدیل شده است. شاید بتوان گفت که توسعه‌ی این روش در سال‌های گذشته و وجود نرم‌افزارهای متعدد تجاری سبب کاربرد وسیع این روش در علوم مختلف از جمله در سازه و مکانیک محاسباتی شده است. اما باید دانست مزایایی مهم مانند نظام‌دار بودن روش اجزای محدود در یافتن توابع تقریب‌زننده، مدل‌سازی شکل‌های پیچیده، قابلیت تبدیل به الگوریتم‌ها و برنامه‌های رایانه‌ای و پیشرفت سریع رایانه‌ها، از علل فراگیر شدن استفاده از این روش می‌باشد. اما روش اجزای محدود دارای معایبی نیز هست که از آن جمله می‌توان به عدم تطابق کامل مدل تحلیل(یعنی شبکه اجزای محدود) با هندسه‌ی موردنظر و خطای ناشی از آن اشاره کرد. همچنین صرف هزینه و وقت قابل توجه برای تولید شبکه‌بندی مناسب از جمله مشکلات روش اجزای محدود محسوب می‌شود. گفته می‌شود که به طور میانگین برای حل یک مسأله اجزای محدود حدود هشتاد درصد از زمان حل مسأله صرف تولید شبکه اجزای محدود می‌شود.

روش عددی حل مسائل با استفاده از اسپلاین‌ها روشی جدید است که مفاهیم آن در سال ۲۰۰۵ برای اولین بار توسط هیوز(T.J.R Hughes) و همکارانش با نام روش هم‌هندسه معرفی گردید [1]. این روش وابسته بر یک درک هندسی از مسأله و تولید جواب‌های آن با استفاده از اسپلاین‌ها و نوع توانمندتر آن یعنی نربز (Non-Uniform Rational B-Spline) می‌باشد. ایده‌ی اصلی این روش بر استفاده از همان توابع پایه نربز مورد استفاده برای تولید هندسه، و ه منظور تقریب پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل استوار است. به این ترتیب می‌توان گفت که با ابداع این روش فرایندهای طراحی و تحلیل در یکدیگر ادغام شدند که این امر می‌تواند پیشبرد عظیمی در زمینه‌ی روش‌های عددی به شمار آید. تا کنون این روش در حوزه‌های مختلف مکانیک محاسباتی؛ از جمله تحلیل سازه‌ای، اندرکنش سیال-سازه، انتشار حرارت، ارتعاشات سازه‌ها و غیره مورد استفاده قرار گرفته است [2,5]. در سال ۲۰۰۶ این روش برای تحلیل ارتعاشات آزاد سازه‌های مختلف؛ از جمله میله‌ها، تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌ها مورد استفاده قرار گرفت [4]. در مقاله‌ی نام‌برده با مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود، با استفاده از تعداد یکسانی از درجات آزادی، دقت و توانمندی این روش در مقایسه با روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات آزاد سازه‌های مختلف، نشان داده شده است. همچنین در سال ۲۰۱۱ روش ایزوژئومتریک توسط ابوالبشری و همکاران [٦] برای تحلیل ارتعاشات آزاد مسائل تنش صفحه‌ای به کار گرفته شد. در این پژوهش برای نخستین بار دقت و کارآمدی روش هم‌هندسه در مسائل وابسته به زمان مورد بررسی قرار گرفته است.

با دیدگاهی قدری متفاوت، و در واقع کلی‌تر، نگارندگان این مقاله روشی را دنبال کرده‌اند که مستقل

از هیوز و همکارانش بوده است و علاوه بر برخی مسائل معمول، در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرایب دیفرانسیل‌ها خود توابعی هستند، با موفقیت به کار گرفته شده است [۸و7]. در این دیدگاه به جای اندیشه‌ی جایگزین کردن جزءهای اجزای محدود با جزءهای گرهی(Knot elements)، حل مسأله برای هریک از مولفه‌های میدان به صورت یک سطح (یا شبه سطح در ابعاد بالاتر از دو) تصور شده است و مختصات نقاط وارسی آن، به عنوان مجهولات مسأله، در نظر گرفته شده‌اند. در این مقاله به‌کارگیری این روش و کیفیت حل به دست آمده در مسائل دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است.

برای انجام تحلیل گذرای دینامیکی، در این روش نیز مشابه روش اجزای محدود، ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی (در صورت وجود) ساخته شده است؛ هر چند که ماتریس‌های فوق مربوط به نقاط وارسی می‌باشند و فاقد مفهوم فیزیکی هستند. برای تابع اولیه‌گیری، زمانی از روش نیومارک که یک روش تابع اولیه‌گیری مستقیم است استفاده می شده است.

در بخش دوم این مقاله به معرفی تحلیل دینامیکی و در بخش سوم به معرفی اسپلاین‌ها و فن نربز و شرح مختصر عامل‌های آنها پرداخته شده است. بخش چهارم روش هم‌هندسه را در مقایسه با روش اجزای محدود معرفی کرده و در بخش پنجم نحوه‌ی به دست آوردن رابطه‌سازی معادلات حاکم، به روش اسپلاین‌ها ارائه شده است. در بخش ششم با حل مسائلی، توانایی روش مذکور نشان داده شده و در بخش هفتم نتایج و پیشنهاداتی در این خصوص بیان شده است.

تحلیل دینامیکی

معادله‌ی حرکت سازه در نوسان اجباری در اثر اعمال نیرو پس از انجام گسسته‌سازی دامنه مسأله به صورت زیر است که در آن M ماتریس جرم، $\ddot{U}$ بردار شتاب، C ماتریس میرایی، $\dot{U}$ بردار سرعت، K ماتریس سختی و U بردار جابه‌جایی می‌باشد [9].

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \qquad (۱)$$

دستگاه معادلات فوق از لحاظ ریاضی بیانگر یک سیستم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است که برای حل آن می‌توان از روش‌های جمع آثار مدها و تابع اولیه‌گیری مستقیم استفاده کرد. در اینجا روش دوم مورد نظر بوده است. برای حل این معادلات می‌توان از روش‌های مختلف عددی؛ نظیر روش‌های اجزای محدود، تفاضل‌های محدود و یا روش‌های بدون شبکه به منظور گسسته‌سازی دامنه و نیز تقریب‌سازی و درون‌یابی بهره جست. در همه‌ی این روش‌ها برای داشتن دقت کافی به کارگیری نقاط گسسته‌سازی نسبتاً زیادی مورد نیاز بوده و در نتیجه، ماتریس‌های ضرایب به دست آمده بزرگ و پر هزینه می‌باشند. نظر به این ویژگی روش هم‌هندسه که در آن امکان تعریف سطوح با نقاط وارسی محدود میسر می‌باشد در اینجا این روش مورد استفاده قرار گرفته است.

برای تابع اولیه‌گیری زمانی از یک روش عددی گام به گام با استفاده از خانواده‌ی روش‌های نیومارک بهره گرفته‌ایم که خلاصه‌ی آن در جدول (۱) قابل مشاهده است [9].

در این جدول، α و γ عامل‌هایی هستند که می توان آنها را برای به دست آوردن دقت تابع اولیه‌گیری و پایداری روش تعیین کرد. تاکنون روش‌های مختلفی بر اساس انتخاب مقادیر گوناگون برای این پارامترها پیشنهاد شده‌اند و هر یک از آنها مزایا و معایب مختلفی دارند. موارد ارائه شده در جدول (۱) از پرکاربردترین روش‌های پیشنهادی مورد استفاده در تحلیل‌های گذرای دینامیکی به شمار می روند که از پایداری و دقت مناسبی برخوردار هستند. از این‌رو در این مقاله نیز از همین روش‌ها استفاده شده است. جزئیات بیشتر در مورد پایداری و دقت هر یک از این روش‌ها در مرجع [9] آمده است.

جدول ۱ برخی از روش‌های خانواده‌ی نیومارک

روش شتاب میانگین ثابت	$\gamma = 2\beta = 1/2$	$\alpha = 1/2$
روش تفاضل مرکزی	$\gamma = 2\beta = 8/5$	$\alpha = 3/2$
روش تفاضل پسرو	$\gamma = 2\beta = 2$	$\alpha = 3/2$

معرفی اسپلاین‌ها و فن نربز

اسپلاین‌ها در واقع ابزاری ریاضی هستند که می‌توان با استفاده از اطلاعاتی اندک، منحنی‌ها و سطوح پیچیده را به صورت عددی مدل کرد [10,11]. برای تولید یک منحنی اسپلاین در حالت کلی بایستی با برخی از تعاریف و مفاهیم آن آشنا بود که به اختصار در ادامه آمده است.

بردار گره. بردار $U=\{u_0,u_1,u_2,...,u_m\}$ در نظر گرفته می‌شود. این بردار شامل مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است؛ به طوری که رابطه‌ی $u_i \le u_{i+1}$ و ($i=0,1,2,...,m-1$) در آن برقرار است. بردار U بردار گره (Knot Vector) و u_iها مقادیرگرهی (knot) نامیده می‌شوند. بازه $\left[u_i,u_{i+1}\right)$ را یک دهانه گرهی(Knot Span) می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد؛ زیرا گره‌ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند. اگر فاصله‌ی بین گره‌ها مساوی باشد، در این حالت بردار گره را یکنواخت (Uniform) می‌نامند، در غیر این صورت این بردار، غیر یکنواخت (Non-Uniform) خواهد بود.

توابع پایه اسپلاین. iامین تابع پایه اسپلاین با درجه‌ی p (یا مرتبه $p+1$) را با $N_{i,p}(u)$ نشان می دهند و به صورت رابطه‌ی (۲) تعریف می‌کنند.

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad u_i \le u < u_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۲)$$

توجه شود که برخی از خواص عامل‌های موجود در روابط فوق عبارتند از:

۱- $N_{i,0}(u)$ یک تابع پله‌ای (Step Function) بوده و به جز در بازه‌ی $u\in\left[u_i,u_{i+1}\right)$ مقدار آن در سایر نقاط صفر است.

۲- برای $p>0$، آن‌گاه $N_{i,p}(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه‌ی $p-1$ می‌باشد.

۳- برای محاسبه‌ی کلیه‌ی توابع پایه به بردار گره U و درجه p نیاز می‌باشد.

٤- در صورتی که رابطه‌ی(۲-۱) به تقسیم $0/0$ برسد، آن را برابر با صفر لحاظ می‌کنند.

٥- $N_{i,p}(u)$ ها، چند جمله‌ای‌های تکه‌ای (Piecewise Polynomial) هستند که بر روی یک خط حقیقی تعریف شده و فقط بازه $\left[u_0,u_m\right]$ را تحت تأثیر قرار می‌دهند.

تولید سطوح اسپلاین و نربز. می‌توان یک سطح نربز را که دارای درجه‌ی p در جهت u و درجه‌ی q در جهت v می‌باشد را با رابطه‌ی(۳) به شکل زیر محاسبه کرد [11].

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}} \qquad \begin{matrix}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1\end{matrix} \qquad (۳)$$

که $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط وارسی و $\{w_{i,j}\}$ وزن مربوط به آنها می‌باشند. توجه شود که اگر وزن کلیه نقاط مساوی یک لحاظ شود، آن‌گاه منحنی‌ها و سطوح تولیدی را با عنوان اسپلاین می‌شناسند و در غیر این صورت منحنی‌ها و سطوح نربز تولید می‌شوند. همچنین $\{N_{i,p}(u)\}$ و $\{N_{j,q}(v)\}$ توابع پایه غیرگویای اسپلاین (Non- rational B-spline basis function) می‌باشند که بر روی بردارهای (٥و٤) تعریف می‌شوند.

$$U=\{\underbrace{0,\dots,0}_{p+1},u_{p+1},\dots,u_{r-p-1},\underbrace{1,\dots,1}_{p+1}\} \qquad (٤)$$

$$V=\{\underbrace{0,\dots,0}_{q+1},v_{q+1},\dots,v_{s-q-1},\underbrace{1,\dots,1}_{q+1}\} \qquad (٥)$$

توجـــه شـــود کـــه روابـــط $r=n+p+1$ و $s=m+q+1$ نیز برقرار می‌باشند و اگـر $R_{i,j}^{p,q}(u,v)$ به شکل رابطه‌ی(۵) در زیر تعریف شود:

$$R_{i,j}^{p,q}(u,v)=\frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}} \qquad (٦)$$

اکنون می‌توان رابطه‌ی(٦) را به شکل (۷) باز نویسی کرد.

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(u,v)P_{i,j} \qquad (٧)$$

با استفاده از رابطه‌ی(۷) می‌توان هر گونه سطح و رویه‌ی پیچیده‌ای را ایجاد کرد که در این‌جـا در روش هم‌هندسـه، بـرای حـل مسـائل از ایـن روابـط بـرای الگوسازی جواب‌ها استفاده می‌شود. قابل ذکـر اسـت که در مدل‌سازی و تحلیل هندسه‌هـای پیچیـده‌تـر؛ از جمله مقاطع مخروطی، بـه منظـور مـدل‌سـازی دقیـق هندسـه بایسـتی از منحنـی‌هـای نربـز بـه جـای بـی اسپلاین‌ها استفاده کرد. در این مقاله رابطه‌سازی مسأله در حالت کلی و بر پایه‌ی منحنی‌های نربـز اسـتخراج شده است؛ ولی از آن‌جایی کـه مثـال‌هـای حـل‌شـده هندسه‌ی سـاده‌ای دارنـد، بـرای مـدل‌سـازی آنهـا از بی‌اسپلاین‌ها استفاده شده است. اطلاعات تکمیلـی در ایـن خصـوص از مراجـع [11,12] قابـل دسـت‌یـابی می‌باشد.

روش هم‌هندسه در مقایسه با روش اجزای محدود

روش هم‌هندسه. در اصل از ترکیب فن‌های طراحـی توسـط رایانـه (Computer Aided Design) و روش اجزای محدود حاصل شده است [1,11]. چهـارچوب کلی تحلیل هم‌هندسه با استفاده از فن نربز در مقایسه با روش اجزای محدود، مبتنی بر اصولی می‌باشـد [1] که عبارتند از:

۱- در این روش به جای جزءها، شبه جزءهـا وجـود دارد که با ضرب بردارهای گـره حاصـل مـی‌شـوند و باید توجه کرد کـه بـه هـیچ عنـوان مفهـوم آن ماننـد جزءها در روش اجزای محدود نمی‌باشـد. بـه عنـوان مثال،در مسائل دوبعـدی ماننـد مسـائل تـنش/کـرنش مسطح این شبکه جزء به صورت $U\times V$ خواهـد بـود که پیش‌تر به آن اشاره شده است.

۲- جزءهـــا از تقســـیم دامنـــه توســـط دهانـــه‌هـــای گرهی(Knot spans) به دست می‌آیند.

۳- هندسه‌ی مسأله با مشارکت شبکه نقاط وارسـی و توابع پایه تولید می‌شود.

٤- با استفاده از مفهوم هـم‌عـاملی (Isoparametric) مجهولات را مانند تغییرمکـان‌هـا، تـنش‌هـا، سـرعت، حرارت و غیره با همان توابع پایه‌ای، که برای تعریف هندسه استفاده شده، بیان کرده است.

۵- درجـــات آزادی عبارتنـــد از متغیرهـــای وارســـی (Control variables) که همـان ضـرایب توابـع پایـه می‌باشند.

در جدول (۲) می‌تـوان مقایسـه‌ای را بـین روش اجزای محدود و روش هم‌هندسه از دیدگاه مشـابهت برخی مشخصـه‌هـای کلیـدی در هریـک از دو روش ملاحظه کرد.

به دست آوردن رابطه‌سازی روش هم‌هندسه

در ایـن بخـش پـس از دسـت‌یـابی بـه تجربیـاتی در خصـوص روش هـم‌هندسـه در کارهـای پژوهشـی گذشته [۸ و7]، ابتـدا معادلـه‌ی دیفرانسـیل حـاکم بـر مسأله‌های تنش/کرنش مسطح معرفـی شـده و سـپس مراحل دست یابی به فرمـول‌بنـدی روش هـم‌هندسـه برای حل این مسائل بیان شده است.

جدول ۲ مقایسه‌ی روش اجزای محدود و روش هم‌هندسه

روش اجزای محدود	روش هم‌هندسه
نقاط گرهی	نقاط وارسی
متغیرهای گرهی	متغیرهای وارسی
شبکه اجزای محدود	مقادیر گره‌ها در بردار گره
انجام درون‌یابی نقاط و متغیرهای گرهی با توابع پایه	عدم انجام درون‌یابی نقاط و متغیرهای وارسی با توابع پایه
هندسه تقریبی	هندسه دقیق
توابع پایه از نوع چندجمله‌ای	توابع پایه نربز
زیردامنه‌ها	وصله‌ها

همان‌گونه که از نگره‌ی کشسانی برمی‌آید، معادلات دیفرانسیل (۸) به طور هم‌زمان بر مسائل تنش/کرنش مسطح حاکم می‌باشند [13].

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=f_x-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=f_y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (۸)$$

در این معادلات شرایط مرزی طبیعی به صورت روابط (۹) بیان می‌شوند.

$$t_x=\left(c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x+c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y$$
$$t_y=c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+\left(c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y \qquad (۹)$$

که در این رابطه n_x و n_y بردارهای یکه در جهت محورهای x و y ، و t_x و t_y مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروهای گسترده سطحی وارد بر جسم هستند. در این روابط، c_{ij}ها ضرایب کشسانی می‌باشند که با فرض ثابت بودن ضریب پواسون و ضریب کشسانی در سراسر دامنه‌ی حل مسأله، در حالت کلی برای مسأله‌های تنش مسطح با مصالح همگن از روابط (۱۰) به شکل زیر،

$$c_{11}=c_{22}=\frac{E}{1-\mu^2}\quad ,c_{12}=\mu c_{11}\ ,\ \ c_{66}=G_{12} \qquad (۱۰)$$

و در مسأله‌های کرنش مسطح با مصالح همسان گرد از روابط (۱۱) به دست می‌آیند [13].

$$c_{11}=\frac{E(1-\mu)}{1-\mu-2\mu^2}\ ,c_{22}=\frac{E(1-\mu^2)}{(1+\mu)(1-\mu-2\mu^2)}\ ,\ c_{12}=\frac{\mu E}{1-\mu-2\mu^2}\ ,\ \ c_{66}=G_{12} \qquad (۱۱)$$

در ادامه جواب مسأله به صورت روابط (۱۲) برای تغییر مکان $u(r,s)$ و (۱۳) برای تغییر مکان $v(r,s)$ در دامنه‌ی مسأله در نظر گرفته شده است که در واقع از تعریف تولید رویه‌ی اسپلاین حاصل شده است. همچنین تغییر مکان در (r,s) متناظر با هر نقطه (x,y) در دامنه‌ی مسأله از روی ارتفاع رویه حل استخراج می‌شود که r و s همان عامل‌هایی هستند که مقادیرشان با توجه به بردار گره حاصل می‌شود.

$$u(r,s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}U_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)U_{i,j} \qquad (۱۲)$$

$$v(r,s)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}V_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)w_{i,j}}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}^{p,q}(r,s)V_{i,j} \qquad (۱۳)$$

همچنین در کلیه روابط بایستی به جای x و y نیز از روابط عاملی مشابه استفاده کرد و آنها را با

عامل‌های r و s جایگزین نمود. در این رابطه، r و s مختصات مربوط به دستگاه مختصات پارامتری هستند، که در روابط (۷-۲) با u و v نشان داده شده‌اند. در این جا به دلیل نمایش مؤلفه‌های متغیر میدانی با u و v، از این عامل‌ها استفاده شده است. اکنون می‌توان تابع‌نمای (Functional) مربوطه را به شکل رابطه (۱٤) نوشت.

$$\Pi = \frac{1}{2}B(u,u) - l(u) \quad (۱٤)$$

که در این رابطه **u** بردار تغییر مکان و $B(u,u)$ و $l(u)$ به ترتیب بخش‌های دوخطی (Bilinear) و خطی (Linear) تابع‌نما طبق روابط (۱٦و۱۵) می‌باشند.

$$B(u,u) = h_{patch} \oint_{\Omega_{patch}} \left[c_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2c_{12} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + c_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + c_{66}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\right] J dr ds \quad (۱۵)$$

و

$$l(\mathbf{u}) = -h_e \oint_{\Omega_e} [u f_x + v f_y - \rho(u\ddot{u} + v\ddot{v})]\, dx dy - h_{patch} \oint_{\Gamma_{patch}} (u t_x + v t_y) d\Gamma \quad (۱٦)$$

زیرنویس patch در این‌جا مشابه روش اجزای محدود که برای المان‌ها استفاده می‌شود، برای وصله‌های تشکیل‌دهنده هندسه مسأله استفاده شده است. همچنین از پارامتر Γ برای انتگرال‌گیری روی مرزها و از پارامتر Ω برای انتگرال‌گیری روی سطح استفاده شده است. t_x و t_y نیروهای خارجی (Traction forces) و پارامتر h نیز ضخامت هر وصله می‌باشد.

پس از نوشتن شکل ضعیف معادلات و محاسبه ژاکوبین‌های مورد نیاز (۲) دستگاه معادلاتی به شکل رابطه (۱۷) به دست می‌آید که با حل آن می‌توان مختصات ارتفاع نقاط وارسی را برای تولید رویه‌ی جواب محاسبه کرد. سپس با استفاده از رابطه تولید رویه و فن معکوس نربز می‌توان مقدار تغییر مکان برای هر نقطه دلخواه از مسأله و یا ترازهای تنش و تغییر مکان را برای مسأله به دست آورد.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (۱۷)$$

که در این رابطه $[M]$ ماتریس جرم، $\{\ddot{U}\}$ بردار شتاب‌ها، $[K]$ ماتریس ضرایب، $\{F\}$ بردار نیروها و $\{U\}$ بردار تغییرمکان‌ها می‌باشند. قابل ذکر است که مقادیر نیروهای معادل بر روی نقاط وارسی ناشی از اعمال بارهای گسترده‌ی سطحی و حجمی به جسم با استفاده از جمله‌های رابطه‌ی تابع اولیه‌گیری (۱٦) به‌سادگی قابل محاسبه است. بردار $\{F\}$ در رابطه‌ی (۱۷) بیانگر مجموع این نیروها است. قابل ذکر است که هر چند در حالت کلی لزوماً نقاط وارسی بر روی هندسه‌ی جسم قرار ندارند، ولی این امر به معنای اعمال بارگذاری و یا شرایط مرزی تکیه‌گاهی به خارج از فضای هندسی نیست؛ و همان‌طور که اشاره شد، برای اعمال شرایط مرزی موجود تنها کافی است سهم هر یک از نقاط وارسی با استفاده از رابطه‌ی (۱٦) محاسبه شود. همچنین سهم هر یک از نقاط وارسی در نتیجه‌ی اعمال بارهای متمرکز نیز با استفاده از همین رابطه و به کمک مفهوم تابع دلتای دیراک (Dirac Delta function) به‌سادگی قابل محاسبه است. اعمال شرایط مرزی ضروری همگن نیز مشابه روش اجزای محدود و بر روی نقاط وارسی مرزی صورت می‌گیرد. اضافه می‌گردد که تنها اعمال شرایط مرزی ضروری غیرهمگن به دلیل عدم ارضای خاصیت تابع دلتای کرونیکر (Kronecker Delta) توسط توابع پایه نربز، در این روش برخلاف روش اجزای محدود به‌صورت دقیق امکان پذیر نیست.

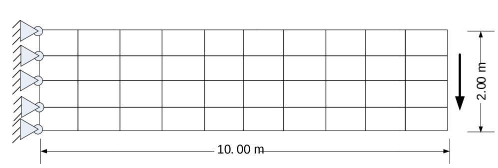
ماتریس جرمی به دست آمده از رابطه‌ی (۱۷) ماتریس جرمی سازگار نامیده می‌شود که در حالت

کلی یک ماتریس غیرقطری است. در مسایل با تعداد درجات آزادی زیاد، به منظور افزایش سرعت محاسبات، ماتریس فوق را با استفاده از روش‌های مختلفی قطری می‌کنند. یکی از این روش‌ها که در این مقاله نیز مورد استفاده قرار گرفته است، قرار دادن مجموع عناصر روی هر سطر به جای عنصر نظیر روی قطر و صفرکردن سایر عناصر روی سطر است [13]. در ادامه، کیفیت و توانمندی و دقت جواب‌ها در روش مذکور با حل نمونه‌هایی نشان داده شده است.

حل چند مثال

به واسطه‌ی عدم وجود مثال با حل دقیق در کتب علمی در این‌جا مثال‌هایی ارائه شده که در آن به مقایسه‌ی حل به دو روش اجزای محدود و هم‌هندسه پرداخته شده است.

مثال۱. صفحه طره‌ای شکل زیر. که تحت اثر نیروی هارمونیک برشی $F(t) = 200\cos(10t)$ در انتها آزاد می‌باشد در نظر گرفته شده است. طول صفحه ۱۰ سانتیمتر و عرض و ضخامت آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتیمتر می‌باشد. تغییر مکان وابسته به زمان گره میانی انتهای صفحه مورد بررسی قرار گرفته است.



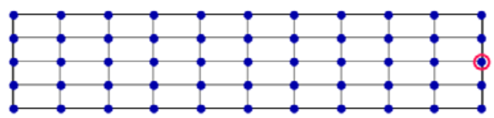
شکل ۱ شبکه‌بندی اجزای محدود مثال حل‌شده۱

خواص صفحه‌ی فوق به شرح زیر است:

$$E = 1500\ \frac{kg}{cm^2}\ ,\ \nu = 0.15\ ,\ \rho = 1\ \frac{kg}{cm^3}\ ,\ \Delta t = 0.005$$

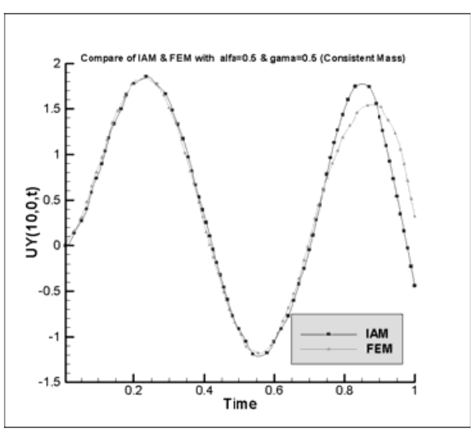
مسأله‌ی فوق با روش هم‌هندسه و با تعداد ۵۵ نقطه‌ی وارسی مطابق شکل (۲) می‌باشد. البته دقت شود که در شکل (۲) هر مستطیل یک جزء نیست و اصلاً در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش هم‌هندسه وجود ندارد. در واقع جزءهای روش هم‌هندسه از حاصل‌ضرب بردارهای گرهی به دست می‌آید. در حالت کلی گره‌ها در اجزای محدود بر روی دامنه قرار می‌گیرند در حالی که در روش هم‌هندسه نقاط وارسی می‌توانند بر روی دامنه نباشند.

بردار گره برای جهت طولی برابر با {۱و۱و۱و۰٫۷۵و۰٫۵۰و۰٫۲۵و۰و۰و۰} و برای جهت عرضی برابر با {۱و۱و۱و۰٫۶۶و۰٫۳۳ و۰و۰و۰} در نظر گرفته شده است. همچنین درجه‌ی توابع پایه اسپلاین در این مسأله مساوی دو لحاظ گردیده است.

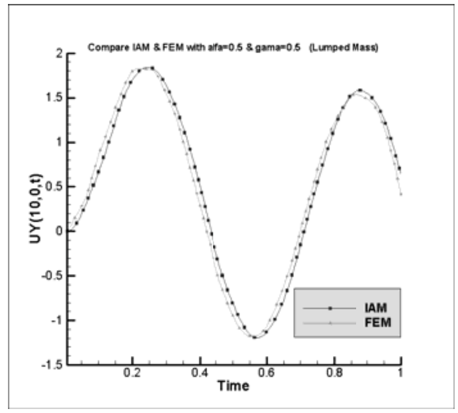


شکل ۲ شبکه نقاط وارسی در صفحه مستطیلی

نتیجه تحلیل هم‌هندسه و اجزای محدود با شرایط ذکرشده و با ماتریس جرم سازگار و متمرکز، در شکل‌های (٤ و۳) نشان داده شده است.

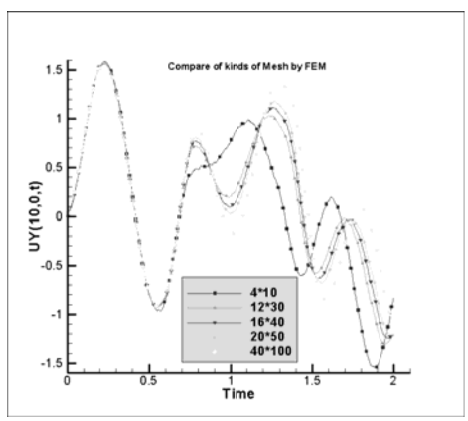


شکل ۳ نمودار تغییرمکان- زمان مثال ۱- جرم سازگار



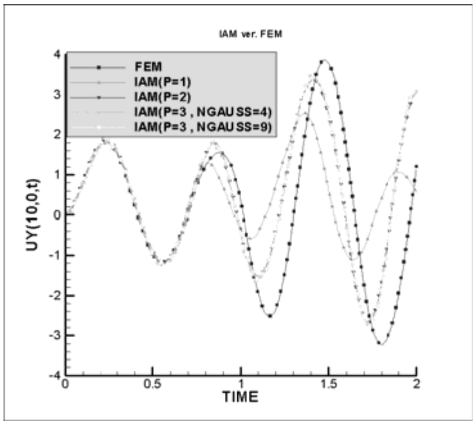
شکل ٤ نمودار تغییرمکان- زمان مثال ۱- جرم متمرکز

ملاحظه می‌شود که در هر دو حالت ماتریس جرم جواب‌های مناسبی به دست می‌آید و عدم انطباق کامل نمودارها قابل قبول است زیرا با توجه به این که در روند حل دینامیکی از تغییر مکان، سرعت و شتاب در گام زمانی قبل استفاده می‌گردد، این عدم انطباق قابل پیش‌بینی است: از طرفی این عدم انطباق در بررسی این صفحه با شبکه‌بندی‌های مختلف به کمک روش اجزای محدود نیز ملاحظه می‌شود که در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ٥ مقایسه‌ی نمودارهای تغییرمکان- زمان با شبکه‌بندی‌های مختلف به روش اجزای محدود

مثال ۲. اثر درجه منحنی اسپلاین‌ها بر دقت جواب مثال قبل با منحنی‌های درجه ۱ و ۲ و ۳ مورد بررسی قرارگرفته و با روش اجزای محدود مقایسه شده است. نتایج این بررسی به صورت زیر می‌باشد.



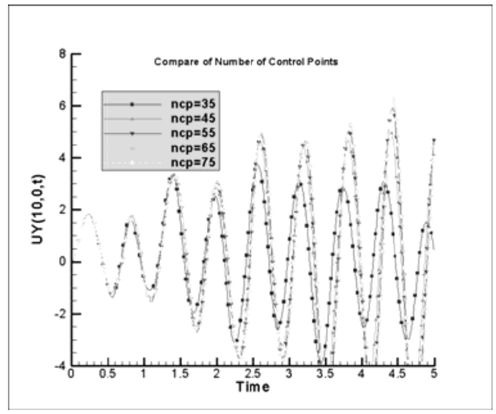
شکل ٦ نمودار تغییر مکان- زمان مثال ۲

بعد از بررسی ملاحظه می‌شود که در $P = 2$ نسبت به $P = 1$ جواب‌ها انطباق بهتری با روش اجزای محدود دارند. همچنین افزایش درجه‌ی منحنی به مقدار ۳ تأثیر چندانی بر بهبود جواب نخواهد داشت. همچنین بررسی انجام‌شده نشان داده که استفاده از ۹ نقطه گوسی در مقایسه با ٤ نقطه گوسی به هنگام استفاده از منحنی اسپلاین درجه ۳ تنها باعث بهتر شدن کیفیت نمودار تغییرمکان – زمان در نقاط اوج نمودار می‌شود.

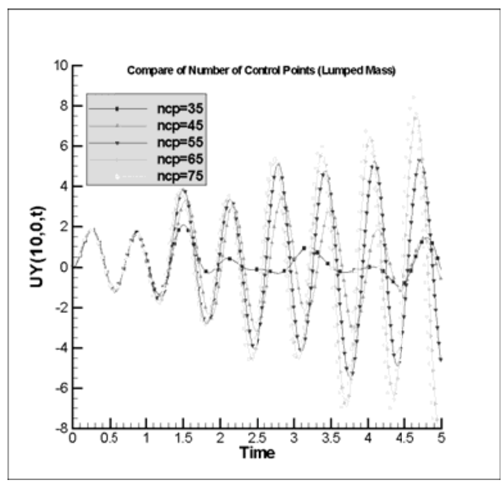
مثال۳. اثر تعداد نقاط وارسی بر دقت جواب. در این قسمت مثال ۱ ثابت نگه داشتن درجه‌ی منحنی اسپلاین و افزایش نقاط وارسی در دو حالت جرم متمرکز و سازگار مورد بررسی قرار گرفته که در زیر مشاهده می‌شود.

همان طور که ملاحظه می‌شود، افزایش نقاط وارسی باعث بهبود جواب خواهد شد. البته این روند

افزایش نقاط وارسی باید با اصولی همراه باشد که در ادامه توضیح داده شده است.



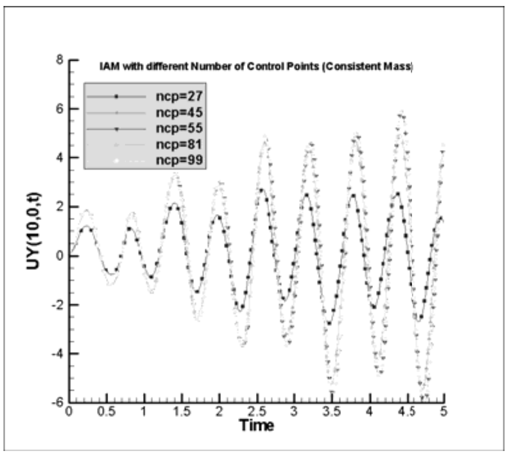
شکل ۷ نمودار مثال ۳ با تعداد نقاط وارسی متفاوت و با ماتریس جرم سازگار



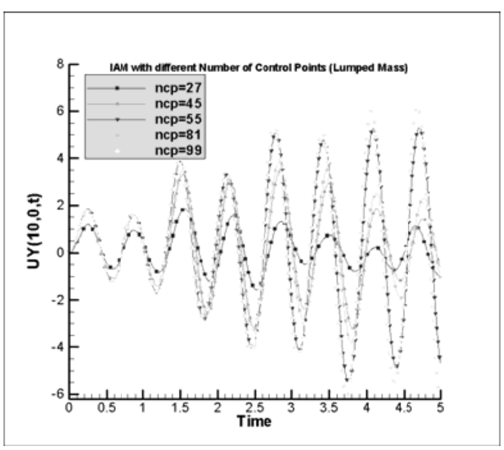
شکل ۸ نمودار مثال۳ با تعداد نقاط وارسی متفاوت و با ماتریس جرم متمرکز

به هنگام استفاده از ماتریس جرم متمرکز اگر نحوه‌ی افزایش نقاط به گونه‌ای باشد که نسبت فاصله‌ی طولی و عرضی نقاط وارسی را کاهش دهد، این روند به بهبود جواب کمک می‌کند ولی در غیراین صورت چنین نخواهد بود که در شکل (۱۰) ملاحظه می‌کنید.

مشاهده می‌شود در حالتی که از ماتریس جرم متمرکز استفاده می‌شود، افزایش نقاط وارسی به تنهایی منجر به جواب دقیق‌تر نمی‌شود، بلکه این افزایش نقاط باید به نحوی باشد که نسبت فاصله‌ی طولی و عرضی نقاط وارسی زیاد نباشد، زیرا با افزایش نقاط وارسی به ۸۱ دیده می‌شود که جواب‌ها از مقدار صحیح خود دور می‌شوند.



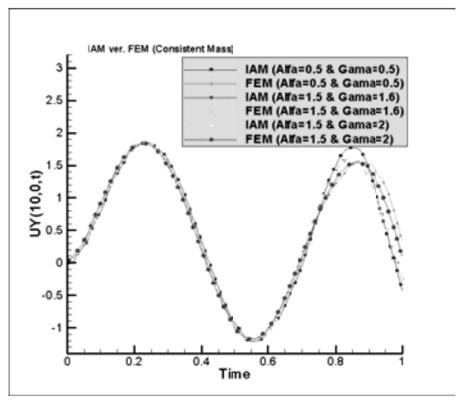
شکل ۹ نمودار مثال۳ با تعداد نقاط وارسی متفاوت و با ماتریس جرم سازگار



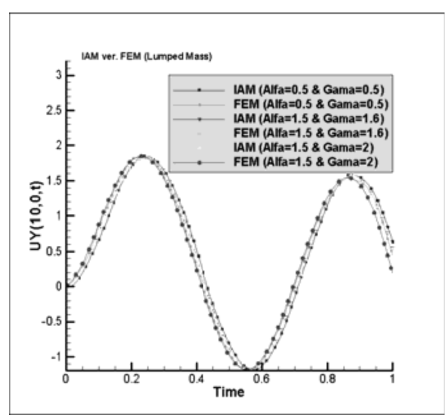
شکل ۱۰ نمودار مثال۳ با تعداد نقاط وارسی متفاوت و با ماتریس جرم متمرکز

در این روند افـزایش نقـاط وارسـی سـعی شـده است که تغییرات نسبت فاصله‌های نقـاط وارسـی در دو راستای عمود بر هم نیز مورد ارزیابی قرار گیرد تـا از افزایش بی‌مورد نقاط که تأثیر منفـی بـر جـواب‌هـا می‌گذارد، جلوگیری شود.

مثال ٤. مثال ۱ با تغییر عامل‌های γ و α مورد بررسـی قرار می‌گیرد و دو روش هم‌هندسه و اجـزای محـدود در دو حالت جرم متمرکز و سـازگار بـا هـم مقایسـه می‌شود.



شکل ۱۱ مقایسه‌ی دو روش هم‌هندسه و اجزای محدود با خود و با یکدیگر به کمک عامل‌های آلفا و گاما – جرم سازگار



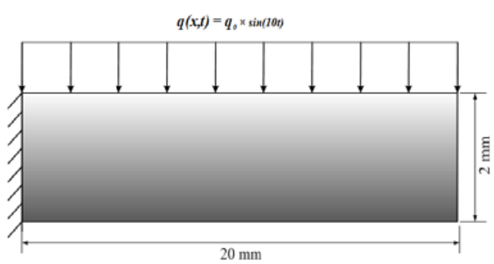
شکل ۱۲ مقایسه دو روش هم‌هندسه و اجزای محدود با خود و با یکدیگر به کمک عامل‌های آلفا و گاما – جرم متمرکز مثال ٤

در این مثـال روش‌هـای شـتاب میـانگین ثابـت، تفاضـل مرکـزی و تفاضـل پسـرو کـه از خـانواده‌ی نیومارک می‌باشند با یکدیگر مقایسه می‌شوند. ملاحظه می‌شود که جواب‌ها در این سه روش تقریبـاً بـه یـک جواب همگرا می‌شوند و از طرفی دو روش هم‌هندسه و اجزای محدود نیز همگرایی خوبی با یکدیگر دارند.

مثال ٥. تیر یک‌سرگیردار-یک‌سرآزاد شکل زیر را در نظر بگیریـد. ایـن تیـر تحـت بـار گسـترده خطـی در سرتاسر طول خود می‌باشد. طول تیـر ۲۰۰ میلـی‌متـر، عرض آن ۲۰ میلیمتر و ضخامت آن برابر ۵ میلـی‌متـر می‌باشد. خواص مکانیکی تیر به شرح زیراند:

$$E = 210\ \text{GPa}\ , \nu = 0.29\ ,\ \ \rho = 7806\ \text{kg/m}^3$$

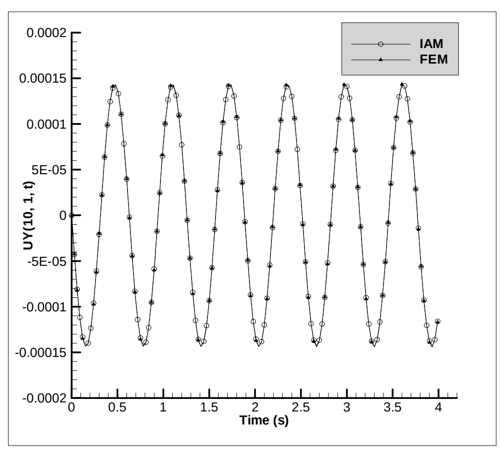
هندسه و شرایط مرزی تیر در شـکل (۱۳) نشـان داده شده است. همان‌طور که در این شکل نشـان داده شده است، یـک بـار گسـترده‌ی یکنواخـت بـر روی صفحه‌ی بالایی تیر اعمال شده است کـه بـه صـورت سینوسی با زمان تغییر می‌کند. در این مثال، تنها تغییـر مکان وابسته به زمـان گـره میـانی انتهـای تیـر مـورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۱۳ هندسه و شریط مرزی تیر یکسرگیردار

مثـال فـوق بـا اسـتفاده از هـر دو روش اجـزای محدود و ایزوژئومتریـک مـورد بررسـی قـرار گرفتـه است. بـه منظـور تحلیـل مسـأله بـا اسـتفاده از روش

ایزوژئومتریک، از یک شبکه‌ی ۲۰ در ۳ از نقاط کنترلی که شامل ۱۲۰ درجه آزادی است، استفاده شده است. همچنین توابع پایه مورد استفاده از درجه‌ی ۲ و بردار گرهی به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. در حالی که برای تحلیل با استفاده از روش اجزای محدود از ٤٠ المان درجه‌ی ۲ (المان سرندیپیتی) که مجموعا شامل ۳۳٦ درجه‌ی آزادی می‌شود، استفاده شده است. نمودار جابه جایی گره میانی انتهای تیر بر حسب زمان در شکل (١٤) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، علی رغم آن که در روش ایزوژئومتریک از تعداد بسیار کمتری از درجات آزادی استفاده شده است، نتایج کاملاً بر یکدیگر منطبق شده‌اند. از آنجایی که حل این مثال با استفاده از روش ایزوژئومتریک منجر به حل دستگاه معادلات بسیار کوچک‌تری نسبت به روش اجزای محدود می‌شود، لذا قاعدتاً زمان محاسباتی مورد استفاده در این روش بسیار کم‌تر خواهد بود.



شکل ١٤ نمودار تغییر مکان- زمان مثال ٥- جرم سازگار

مثال٦. صفحه‌ی یک‌سرگیردار-یک‌سرآزاد با مقطع متغیر شکل زیر را در نظر بگیرید. طول صفحه ۱۰ سانتی‌متر، عرض آن در ابتدا برابر ٥ سانتیمتر و در انتها برابر ۳ سانتی‌متر می‌باشد. ضخامت صفحه نیز برابر ۱ سانتی‌متر است. خواص مکانیکی صفحه به شرح زیراند:

$$E = 70\ \text{GPa} \quad , \quad \nu = 0.3 \quad , \quad \rho = 1000\,\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$\boldsymbol{f_1(t)}$

5 mm

3 cm

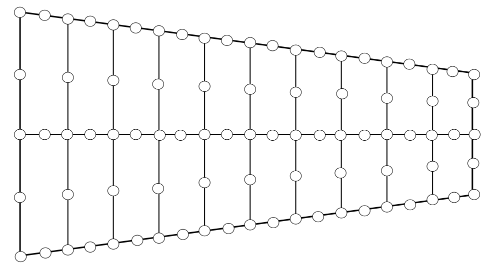
$\boldsymbol{f_2(t)}$

10 cm

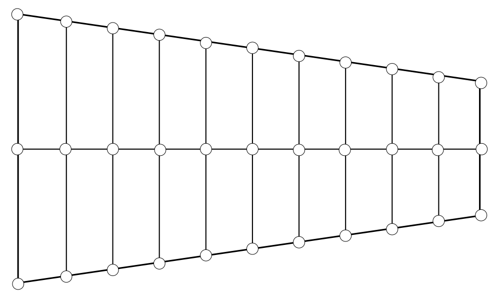
شکل ١٥ هندسه و شرایط مرزی صفحه با سطح مقطع متغیر

همان طور که در شکل (١٥) نشان داده شده است، این صفحه تحت اثر دو بار نقطه‌ای سینوسی در نقاط گوشه‌ای سر آزاد خود که به صورت $f_1(t) = f_2(t) = 2000 \times \sin(20t)$ با زمان تغییر می‌کنند، می‌باشد. شبکه‌بندی اجزای محدود و نیز شبکه‌ی نقاط کنترلی مورد استفاده برای حل این مثال به ترتیب در شکل‌های (١٧ و ١٦) نشان داده شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود، شبکه‌بندی اجزای محدود مورد استفاده شامل ٨٥ نقطه‌ی گرهی (معادل ١٧٠ درجه‌ی آزادی) و شبکه‌ی نقاط کنترلی شامل ۳۳ نقطه‌ی کنترلی (٦٦ درجه‌ی آزادی) می‌شود. در این‌جا میزان جابه جایی گره میانی انتهای تیر بر حسب زمان مورد بررسی قرار گرفته و در شکل (١٨) در بازه‌ی صفر تا پنج ثانیه رسم شده است.

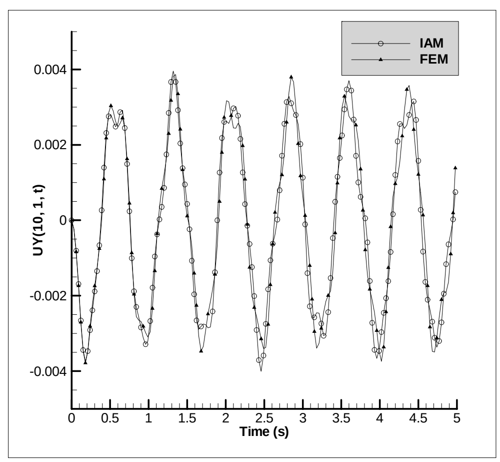
قابل ذکر است که در هر دو روش از تعداد یکسان ٤ نقطه‌ی گوسی در هر المان یا دهانه‌ی گرهی برای تابع اولیه‌گیری استفاده شده است و همان طور که شکل (١٨) نشان می‌دهد، نتایج انطباق نسبتاً خوبی به ویژه در زمان‌های ابتدایی با یکدیگر دارند.



شکل ۱٦ شبکه‌بندی روش اجزای محدود مثال ٦



شکل ۱۷ شبکه ی نقاط وارسی مثال٦



شکل ۱۸ نمودار جابه جایی گره میانی انتهای تیر بر حسب زمان

این در حالی است که ابعاد دستگاه معادلات حاصل از روش ایزوژئومتریک تقریباً یک سوم روش اجزای محدود می‌باشد و قاعدتاً منجر به کاهش چشم‌گیر زمان محاسبات خواهد شد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

پس از بررسی‌های انجام‌شده نتایجی به شرح زیر به دست آمد:

در حل مسائل هم ماتریس جرم سازگار و هم ماتریس جرم متمرکز جواب‌های مناسبی ارائه کردند.

افزایش درجه‌ی منحنی اسپلاین‌ها و افزایش تعداد نقاط گوسی باعث بهبود جواب در تحلیل دینامیکی خواهد شد.

در تحلیل دینامیکی به کمک ماتریس جرم متمرکز، افزایش تعداد نقاط وارسی باید با یک شرط همراه باشد تا به جوابی مناسب‌تر نائل گردد. و شرط یادشده آن است که نسبت فاصله‌ی طولی و عرضی(Aspect ratio) نقاط وارسی بیشتر از ٤ نباشد.

با توجه به نمودارهای ارائه شده، در مقایسه‌ی روش‌های شتاب میانگین ثابت، تفاضل مرکزی و تفاضل پسرو با یکدیگر به کمک روش هم‌هندسه جواب‌های مناسبی ارائه شد. علاوه بر این، تحلیل دینامیکی با این سه روش به کمک روش‌های اجزای محدود و هم‌هندسه با یکدیگر مقایسه شد که جواب‌ها تقریباً بر یکدیگر منطبق شدند.

عدم انطباق کامل جواب‌ها در تحلیل دینامیکی به کمک دو روش اجزای محدود و هم‌هندسه قابل پیش‌بینی است؛ زیرا در حل مسائل از شتاب، سرعت و جابه جایی گام زمانی قبل استفاده می‌شود. لذا در بررسی انجام‌شده به روش اجزای محدود، با شبکه‌بندی‌های مختلف دیده شد که با افزایش تعداد گره‌ها و در نتیجه کوچک شدن جزءها، نمودار تغییر مکان- زمان گره‌های مشخص، دیگر بر هم منطبق نیست اما، از شکل خاصی پیروی می‌کند.

تمام کارهای ارائه‌شده در این مقاله در حیطه‌ی مسأله‌های همگن قرار دارند و به عنوان کارهای پیشنهادی می‌توان این بررسی‌ها را در رابطه با

مسأله‌هـای همسـانی عمـودی نیـز بـه انجـام رسـاند. همچنین با توجه به در اختیار داشتن ماتریس جـرم و سختی مـی‌تـوان کلیـه کارهـای فـوق را در حیطـه‌ی مسأله‌های همگن و همسانی عمودی با حضور میرایی انجام داد.

مراجع

1. Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", Vol. 194, pp. 4135-4195, (2005).
2. Bazilevs, Y., Calo, V.M., Hughes, T.J.R. and Zhang, Y., "Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations", Computational Mechanics, Vol. 43, pp. 3-37, (2008).
3. Zhang, W.L., Mo, R., Wan, N. and Zhang, Q., "Isogeometric analysis of heat transfer in fluids", Applied Mechanics and Materials, Vol. 105, pp. 2174-2178, (2012).
4. Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, pp. 5257-5296, (2006).
5. Reali, A., "An Isogeometric Analysis approach for the study of structural vibrations", Journal of Earthquake Engineering, Vol. 10, pp. 1-30, (2006).

٦. ابوالبشری، م.ح.، حسنی، ب.، حسن‌زاده، ع.، ژیانی عیدگاهی، ا. و ظریف مقدم، ن.، «تحلیل ارتعاشات آزاد مسـائل تـنش صـفحه‌ای بـا استفاده از روش ایزوژئومتریک» ، اولین کنفرانس بین‌المللی آکوستیک و ارتعاشات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، (۱۳۹۰).

7. Hassani, B., Moghaddam, N.Z. and Tavakkoli, S.M., "Isogeometrical solution of Laplace equation", Asian journal of civil engineering (building and housing), Vol. 10, no. 6, pp. 579-592, (2009).

۸ حسنی، ب. و ظریف مقدم، ن.،«توسعه روش عددی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل متداول با استفاده از توابع پایـه اسـپلاین‌هـا»، گزارش فنی شماره ۱۰۱۵، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران، (۱۳۸۸).

9. Clough, R.W. and Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, New York, (1993).
10. Hassani, B., Khanzadi, M., Tavakkoli, S.M. and Moghaddam, N.Z., "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems", 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June 1-5, Lisbon, Portugal, (2009).
11. Piegl, L. and Tiller, W., "The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)", Second ed., Springer-Verlag, New York, (1997).
12. Rogers, D.F., "An Introduction to NURBS: With Historical Perspective", Second ed., Morgan Kaufmann publishers, (2001).
13. REDDY, J. N., "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill, Inc, (1993).